Cálculo I

Examen VIII

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Cálculo I
Examen VIII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Jesús Muñoz Velasco

Granada, 2024

Asignatura Cálculo I.

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor José Luis Gámez Ruiz.

Descripción Convocatoria Extraordinaria.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Sean A y B conjuntos **mayorados** de números reales tales que $A \cap B \neq \emptyset$.

1. Probar que $A \cap B$ está mayorado, con
$$sup(A \cap B) \leqslant \min\{\sup(A), \sup(B)\}$$
2. Probar que, en el caso en que A y B sean intervalos, entonces la desigualdad del apartado anterior es una igualdad.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.**

1. (0,5 Puntos) Definir el concepto de sucesión convergente a $L \in \mathbb{R}$.
2. (0,5 Puntos) Definir el concepto de sucesión divergente positivamente.
3. (1 Punto) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y no mayorado y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Demostrar la equivalencia de las dos afirmaciones siguientes, para $L \in \mathcal{R}$.
   a) Si $\{a_n\}$ es una sucesión de puntos de A que diverge positivamente, entonces la sucesión $f(a_n)$ converge a L.
   b) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que si $x \in A$ con $x > M$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

Ejercicio 3 (3 puntos)**.**

1. (1,5 Puntos) Sea $\{x_n\} \to x \neq 0$. Estudiar la convergencia de la sucesión $\left\{\frac{1}{n^p}\sum_{k=1}^{n} kx_k\right\}$, en función del parámetro $p \in \mathbb{N}$, calculando en su caso el valor del límite.
2. (1.5 Puntos) Dado $a \in \mathbb{R}^+$, estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}\left(a + \frac{1}{n}\right)^{-n}$.

Ejercicio 4 (1,5 puntos)**.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función creciente y supongamos que es continua en un punto dado $a \in \mathbb{R}$. Probar que:
$$\sup\{f(x) : x < a\} = f(a) = \inf\{f(y) : y > a\}$$

Ejercicio 5 (1,5 puntos)**.** Sea $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ una función tal que:
$$|\cos(x) - \cos(y)| \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|, \quad \forall x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Responder a las siguientes cuestiones de forma justificada, enunciando los resultados que se utilicen para ello:

1. ¿Es f continua?
2. ¿Es f estrictamente monónota?
3. ¿Existe la inversa de f? En caso afirmativo. ¿Es f^{-1} continua? ¿Es f^{-1} estrictamente monónota?